数理解析研究所講究録
20巻 1967年 41-57

1-parameter groups of unitary operators のスペクトル型 と Transversal groups

名工大　　小和田 正

§1. 序

確率空間上の Automorphisms や Flows の スペクトル型を調らべることは重要な問題であるが、こゝでは Sinai が Kolmogoroff flow (automorphism) の判定の為に取り上げた Transversal field の概念を、一般な可分ヒルベルト空間上の ユニタリー作用素の 1-parameter group に modify することによって、与えられたユニタリー作用素又はその1径数群のスペクトル型、特にスペクトルのルベーグ性を判定することを考える。このような、測度空間の構造を無視した解析によってもTransversal group の存在を仮定すれば、可成の結果が得られる。特に、連続スペクトルをもつTransversal group が存在するユニタリー作用素のスペクトル型が σ-ルベーグであることがわかる。

Transversal group をもつ例としては、Brown運動の Flow

負定曲率曲面上の geodesic flow，及びトーラス群にの algebraic automorphism 等が重要である。

2 Transversal group と 1-parameter group of unitary operators との対応関係は明らかでないが、特殊な場合として、Transversal flow の metrical type が、その automorphism の metrical type を決定するような class が存在することが示される。

§.2 ユニタリー作用素のスペクトル型

定義2.1 可分ヒルベルト空間H上のユニタリー作用素又はその 1-parameter 群によってHを Hellinger-Hahn 分解

$$H = \sum \oplus H_n \quad , \quad H_n \cong L^2(R, d\rho_n)$$

した時、対 $(d\rho_1, m(\lambda))$（但し $m(\lambda)$ は λ の重複度）をスペクトルタイプと云い、ρ_1 がルベーグ測度と互いに絶対連続の時、ルベーグスペクトルと云う。

定義2.2. 可分なヒルベルト空間H上のユニタリー作用素 U に対して、H上の1パラメーターユニタリー作用素群 $\{V_s \mid -\infty < s < +\infty\}$ が次の交換関係

$$U V_s = V_{\lambda s} U \quad (\lambda \text{は実数})$$

を満足する時、$\{V_s\}$ を U の transversal group と云う。又この時、$\frac{1}{\lambda}$ を拡大係数と呼び、$\frac{1}{\lambda} > 1$ の時、$\{V_s\}$ は拡大し

ていると云い、$\frac{1}{\lambda}<1$ ならば $\{V_s\}$ は縮少している、又 $\lambda=1$ の時は $\{V_s\}$ は degenerate しているという。

注意　$UV_s = V_{f(s)}U$ より $f(s)=\lambda s$ が容易に得られる。

以下 U は拡大している transversal group $\{V_s\}$ をもつものとする。縮少している $\{V_s\}$ を持つ場合も類似の議論が成立するので結果だけを合せて記すことにする。又
$H_0 = \{f\in H \mid V_s f = f \ \text{for}\ \forall s\} = \{0\}$ と仮定する。

Lemma 2.1. $\{V_s\}$ の点スペクトル全体を Γ とした時、$\mu_0\in\Gamma$ をえらび、

$$\Gamma_0 = \{\mu\in\Gamma \mid \mu_0 \leqq \mu < \tfrac{\mu}{\lambda}\},$$

$$\Gamma_m^+ = \frac{1}{\lambda^m}\Gamma_0,\quad \Gamma_m^- = \frac{-1}{\lambda^m}\Gamma_0 \quad (m=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

とすれば、$\Gamma_m^{\varepsilon}\cap\Gamma_n^{\varepsilon'}=\phi$ ($m\neq n$, $\varepsilon=\pm1$, $\varepsilon'=\pm1$ 又は $m=n$, $\varepsilon\neq\varepsilon'$)

且つ $\Gamma = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty}\{\Gamma_m^+\cup\Gamma_m^-\}$。

証明　$V_s\varphi = e^{is\mu}\varphi$ とすれば

$$V_sU^m\varphi = U^mV_{\frac{s}{\lambda^m}}\varphi = e^{is\mu/\lambda^m}U^m\varphi$$

$$\therefore\quad \mu\lambda^{-m}\in\Gamma \qquad (m=0,\pm1,\cdots)。$$

一方 $0<\mu_0<\mu$ とすれば、整数 $m\in\left(\log\frac{\mu_0}{\mu}/\log\lambda - 1,\ \log\frac{\mu_0}{\mu}/\log\lambda\right]$

をとれば、$\lambda^m\mu\in\Gamma_0$。従って $\mu=\frac{\lambda^m\mu}{\lambda^m}\in\Gamma_m^+$ を得る。
$0<\mu_*<\mu_0$ や $\mu_0<0$ の場合も同様である。（証明終）

以下 $\mu_0>0$ と仮定しておく。$\{V_s\}$ の点スペクトルが全て負数の時は、$W_s\equiv V_{-s}$ として $\{V_s\}$ を $\{W_s\}$ でおきかえてやれば良い。

$\mu_k\in\Gamma_0^+\cup\Gamma_0^-$ に対応する固有ベクトルを φ_n^k,（$k=1,2,\ldots$。$n=1,2,\ldots,n_k$，但し n_k は μ_k の重複度）とかく。任意の s に対して、

$$
\begin{aligned}
(U^m\varphi_n^k,U^{m'}\varphi_{n'}^{k'})&=(V_sU^m\varphi_n^k,V_sU^{m'}\varphi_{n'}^{k'})\\
&=(U^mV_{\frac{s}{\lambda^m}}\varphi_n^k,U^{m'}V_{\frac{s}{\lambda^{m'}}}\varphi_{n'}^{k'})\\
&=\exp[is(\tfrac{\mu_k}{\lambda^m}-\tfrac{\mu_{k'}}{\lambda^{m'}})](U^m\varphi_n^k,U^{m'}\varphi_{n'}^{k'})
\end{aligned}
$$

であるから、$\mu_k=\mu_{k'}$，$m=m'$ 且つ $n=n'$ でなければ、

$$U^m\varphi_n^k\perp U^{m'}\varphi_{n'}^{k'}.$$

（特に、$n\neq n'$ の時は、$(U^m\varphi_n^k,U^m\varphi_{n'}^k)=(\varphi_n^k,\varphi_{n'}^k)=0$ より得られる）。従って $H_n^k\equiv\mathfrak{S}\{U^m\varphi_n^k\mid m=0,\pm1,\ldots\}$ とすると

$$H_n^k\perp H_{n'}^{k'}\quad(k\neq k'\ \text{or}\ n\neq n').$$

Lemma 2.2．U は H_n^k の上で単純ルベーグスペクトルを持つ。

証明．$U^m=\int e^{im\xi}dE_\xi^U$ と表現すれば、

Lemma 2.1 より $U^m\varphi_n^k \perp \varphi_n^k$ だから、

$$\int e^{im\xi} d\|E_\xi^U \varphi_n^k\|^2 = (U^m\varphi_n^k, \varphi_n^k) = 0 \ 。$$

故に Paley-Wiener の定理から結論を得る。　　　　（証明終）

定理 2.1　ユニタリー作用素 U が拡大又は縮少している純点スペクトルを持つ transversal group $\{V_s\}$ を持つ時 U は $(\sum n_k)$ 一重　ルベーグスペクトルを持つ。

証明　Γ_m^+, Γ_m^- に対応する固有ベクトル全体が生成する H の部分空間をそれぞれ M_m^+, M_m^- とする。Lemma 2.1 より、

$$H = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \oplus (M_m^+ \oplus M_m^-) \ .$$

しかるに $U^m M_n^\pm = M_{n+m}^\pm$ （± 同順）、且つ H_n^k の作り方から

$$U^m M_0^\pm \subset \sum_{n,k} \oplus H_n^k \subset H \ 。$$

故に

$$\sum_{n,k} \oplus H_n^k = H \ 。$$

（証明終）

次に $\{V_s\}$ が連続スペクトルを持つ場合について述べる。以下 U は transversal group $\{V_s\}$ を持ち，この時 $\{V_s\}$ は拡大していて、連続スペクトルを持つものとする。

$$V_s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s\xi} d E_\xi^V$$

$$H_\xi = E_\xi^V H$$

とした時、

Lemma 2.3. $U^m H_\xi = H_{\xi\lambda^{-m}}$, $-\infty < \xi < +\infty$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$。

証明 任意の $f, g \in H$ について、

$$(V_s f, g) = \int e^{2\pi i s\xi} d(E^V_\xi f, g)$$
$$= (U^m V_s f, U^m g)$$
$$= (V_{\lambda^m s} U^m f, U^m g)$$
$$= \int e^{2\pi i s\lambda^m \xi} d(E^V_\xi U^m f, U^m g)$$
$$= \int e^{2\pi i s\xi} d(U^{-m} E^V_{\xi\lambda^{-m}} U^m f, g)$$

$\{U^{-m} E^V_{\xi\lambda^{-m}} U^m\}$は単位分解であるからその uniqueness により、

$$U^m E^V_\xi = E^V_{\xi\lambda^{-m}} U^m$$

又 $U^m H = H$ に注意すると

$$U^m H_\xi = H_{\xi\lambda^{-m}}。$$

（証明終）

$\{V_s\}$ が単位作用素のみから成るのでなければ，実数 $\xi_0 > 0$ が存在して

$$\dim(H_{\xi_0\lambda^{-m}} \ominus H_{\xi_0}) > 0$$
$$\dim(H_{-\xi_0} \ominus H_{-\xi_0\lambda^{-m}}) > 0 \qquad (m \geq 1)。$$

$\xi_1 = \xi_0\lambda^{-1}$, $\xi_{-1} = -\xi_0\lambda^{-1}$, $M^+ = H_{\xi_1} \ominus H_{\xi_0}$ 又 $M^- = H_{-\xi_0} \ominus H_{\xi_{-1}}$ とかくことにする。 Lemma 2.3. より $U^m M^+$, $U^m M^-$, $U^n M^+$, $U^n M^-$ (等は直交する ($m \neq n$)。 更に $M^\pm$ は $\{V_s\}$ の不変部分空間であり且 $\{V_s\}$ は $M^\pm$ に固有値を持たないから、

$$\dim(M^\pm) = +\infty。$$

M^+ の base を $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ とする。

$$U\varphi_1 \in UM^+ = UH_{\xi_1} \ominus UH_{\xi_0} = H_{\xi_1\lambda^{-1}} \ominus H_{\xi_1}$$

従って $\displaystyle\int e^{2\pi i m\xi} d\|E_\xi^U \varphi_1\|^2 = (U^m\varphi_1, \varphi_1) = 0. \ (m \neq 0)$。

$H_1^+ = \mathfrak{S}\{U^m\varphi_1 \mid m = 0, \pm 1, \ldots\}$ とすれば、Payley-Wiener の定理により U は cylic subspace H_1^+ 上で単純ルベーグスペクトルを持つ。又

$$U\varphi_2 \in H_{\xi_1\lambda^{-1}} \ominus H_{\xi_1}$$

は同様に云える。H_1^+ 上への射影を P_1 とする。$\varphi_2 = P_1\varphi_2$ の時は φ_3 に進む。

$\varphi_2 \neq P_1\varphi_2$ の時は

$$\left(U^m(\varphi_2 - P_1\varphi_2), (\varphi_2 - P_1\varphi_2)\right) = -(U^m P_1\varphi_2, P_1\varphi_2)$$

より、$H_2^+ \equiv \mathfrak{S}\{U^m(\varphi_2 - P_1\varphi_2) \mid m = 0, \pm 1, \ldots\}$ 上で U は単純ルベーグスペクトルを持つ。以下同様の操作で、$H_1^+, H_2^+, \ldots$ を得て U は H_n^+ 上で単純ルベーグスペクトルを持つ。又

$\varphi_2 = (\varphi_2 - P_1\varphi_2) + P_1\varphi_2$ で $P_1\varphi_2 \in H_1^+$ に注意すれば、$\varphi_2 \in H_1^+ \oplus H_2^+$。

一般に $\varphi_n \in H_1^+ \oplus H_2^+ \oplus \cdots \oplus H_n^+$ であるから

$$M^+ \subset \sum \oplus H_n^+ \subset H \ 。$$

以上の手順で M^- から，$H_1^-, \ldots, H_n^-, \ldots$ をつくると

$$M^- \subset \sum \oplus H_n^- \subset H \ 。$$

明らかに $\sum \oplus H_n^+$ と $\sum \oplus H_n^-$ は直交している。

$$(U^m H_{\xi_0}) \ominus H_0 = \left(U^{m-1}(H_{\xi_1} \ominus H_{\xi_0}) \oplus U^{m-2}(H_{\xi_1} \ominus H_{\xi_0}) \oplus \cdots\right)$$

$$= U^{m-1}M^+ \oplus U^{m-2}M^+ \oplus \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad (U^m H_{\xi_0}) \ominus H_0 \subset \sum \oplus H_n^+$$

一方 $\quad U^m H_{-\xi_0} = U^m(H_{-\xi_0} \ominus H_{\xi_{-1}}) \oplus U^{m+1}(H_{-\xi_0} \ominus H_{\xi_{-1}}) \oplus \cdots$

$$= U^m M^- \oplus U^{m+1} M^- \oplus \cdots$$

$$\therefore \quad U^m H_{-\xi_0} \subset \sum \oplus H_n^-$$

しかるに $\quad U^m H_{-\xi_0} = H_{-\xi_0 \lambda^{-m}}$ 且 $E^{\nabla}_{-\xi_0\lambda^{-m}} \to E^{\nabla}_0 \quad (m \to -\infty)$

$$\therefore \quad H_0 = E^{\nabla}_0 H = \sum \oplus H_n^-$$

$$\therefore \quad U^m H_{\xi_0} \subset \sum \oplus (H_n^+ \oplus H_n^-)$$

又 $\quad U^m H_{\xi_0} = H_{\xi_0\lambda^{-m}} = E^{\nabla}_{\xi_0\lambda^{-m}} H$

且つ $\quad E^{\nabla}_{\xi_0\lambda^{-m}} \to I \quad (m \to +\infty)$

従って $\quad \sum \oplus (H_n^+ \oplus H_n^-) = H$ 。

一方 H のこの direct sum に可付番の成分が実際に現れることが次のようにしてわかる。点列 $\{\xi^i\}$ を

$$\xi_0 = \xi^0 < \xi^1 < \cdots < \xi_0 \lambda^{-1}$$

とえらび、$\quad \psi_i \in (E^{\nabla}_{\xi^i} - E_{\xi^{i-1}})H \quad (i = 1, 2, \ldots)$

としたとき $\{\psi_i\}$ を M^+ の base に拡張したものを $\{\varphi_i\}$ とかくことにすると、$\xi^i\lambda^{-m} \in [\xi_0, \xi_0\lambda^{-m}]$ for $\forall m$, 且つ

$$U^m \psi_i \in U^m H_{\xi^i} \ominus U^m H_{\xi^{i-1}} = H_{\xi^i\lambda^{-m}} \ominus H_{\xi^{i-1}\lambda^{-m}}$$

$$\therefore \quad (U^m \psi_i, \psi_j) = 0$$

以上から次の結果を得る。

定理2.2　ユニタリー作用素Uが拡大（又は縮少）している transversal group $\{V_s\}$を持ち，$\{V_s\}$が連続スペクトルを持つならば，Uは σ-ルベーグスペクトルを持つ。

次に一般の拡大（又は縮少）している transversal group $\{V_s\}$を持つ場合を考えるのに，$\{V_s\}$の固有値全体が生成する部分空間をH_d及びその直交部分空間H_cとした時，$H_d \neq \{0\}$かつ$H_c \neq \{0\}$とすれば充分である。

定理2.3．ユニタリー作用素Uが，拡大又は縮少している transversal group $\{V_s\}$を持ち，　　　$H_c \neq \{0\}$ならば，Uは σ-ルベーグスペクトルを持つ。

証明　H_dへの射影作用素をP_dとする。又$P_d V_s = V_s^d$，$P_d U = U^d$とすると，P_dはU及びV_sと可換だから，

$$U^d V_s^d = U^d P_d V_s = P_d U V_s = P_d^2 V_{\lambda s} U = V_{\lambda s}^d U^d$$

即ち$\{V_s^d\}$はU^dの transversal group で拡大係数は変らない。同様にして，$(I-P_d)V_s = V_s^c$は$U^c = (I-P_d)U$の transversal group でU^cは前定理から σ-ルベーグ on H^cだから

$U = U^d + U^c$はH上で σ-ルベーグスペクトルを持つ。

（証明終）

§3 ユニタリー作用素の1-parameter群のスペクトルタイプ

この章では ユニタリー作用素の1-parameter群$\{U_t\}$のスペクトルタイプについて考える。二，三の点を除いて、前章の考え方はこゝの場合にも類似に適用される。

定義 3.1. Separable Hilbert空間H上のユニタリー作用素の1-parameter群$\{U_t : -\infty < t < +\infty\}$に対し、H上のユニタリー作用素の1-parameter群$\{V_s . -\infty < s < +\infty\}$が或実数$\lambda \neq 0$に対し、次の交換関係

$$U_t V_s = V_{se^{\lambda t}} U_t$$

をみたすとき、$\{V_s\}$を$\{U_t\}$の transversal group と呼ぶ。又 $-\lambda$ を拡大係数といゝ、$\lambda > 0$ の時$\{V_s\}$は縮少しているといい、$\lambda < 0$ の時$\{V_s\}$は拡大しているという。

注意 3.1. 交換関係 $U_t V_s = V_{u(t,s)} U_t$ に於いて $u = u(t,s)$ が aperiodic differentiable とすれば

$$u(t,s) = \mu e^{\lambda t}$$

が或る実数μ, λについて成立することが示される。この

意味で我々の定義は自然なものであると云える。

単独の作用素Uの場合と群$\{U_t\}$の場合と本質的に異る点は、群$\{U_t\}$の transversal group $\{V_s\}$にはゼロ以外の点スペクトルがあらわれないことである。即ち $H_0 \equiv \{\varphi \in H : V_s \varphi = \varphi\}$ としたとき、

定理3.1 $\{U_t\}$の transversal group $\{V_s\}$は $H \ominus H_0$ で連続スペクトルを持つ。

証明 $V_s f = e^{is\mu} f$, $\mu \neq 0$

とする。

$$
\begin{aligned}
(U_{t_1} f, U_{t_2} f) &= (V_s U_{t_1} f, V_s U_{t_2} f) \\
&= \exp(i\mu s e^{\lambda(t_1 - t_2)})(U_{t_1} f, U_{t_2} f)
\end{aligned}
$$

より $t_1 \neq t_2$ なら $U_{t_1} f$ と$U_{t_2} f$は直交する。即ち

$\{U_t f : -\infty < t < +\infty\}$ は直交系となる。これはHの可分性に矛盾する。 (証明終)

以下に於いて$\{U_t\}$は拡大している transversal group $\{V_s\}$を持つものとする。$\{V_s\}$の Stone-分解を

$$V_s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s \xi} \, dE_\xi^V$$

とし、部分空間 $E^{\nabla}_{\xi}H$ を H_{ξ} とかくことにする。次の Lemma 3.1 は lemma 2.3 と同様に証明される。

Lemma 3.1 $\quad U_t H_{\xi} = H_{\xi e^{-\lambda t}}$

$e^{-\lambda t}$ が strictly increasing であることから 部分空間

$$M(t,\xi) = H_{\xi e^{-\lambda t}} \ominus H_{\xi}$$

に対して $\exists t_0>0$, $\exists \xi_0>0$, $M^+ \equiv M(t_0,\xi_0)$ は無限次元となる。$\{\varphi_i\}$ を M^+ の base として §2 と同様な手順で cyclic sub-space の族 $\{H_1^+, H_2^+, \ldots\}$ を得る。同様に $M^- \equiv M(t_0,-\xi_0)$ から出発して cyclic subspace の族 $\{H_1^-, H_2^-, \ldots\}$ を得る。ここで $\{H_n^+\}$ と $\{H_n^-\}$ が無限列であることは保障されない。即ち $U_t\varphi_j \perp M^+$ であることを主張する根拠がないからである。

次に $H = \sum\oplus(H_n^+ \oplus H_n^-)$ であることを示そう。

$$(U_t H_{\xi_0}) \ominus H_0 = U_{t-t_0}(H_{\xi_0 e^{-\lambda t_0}} \ominus H_{\xi_0}) \oplus$$
$$\oplus U_{t-2t}(H_{\xi_0 e^{-\lambda t_0}} \ominus H_{\xi_0}) \oplus \cdots$$
$$= U_{t-t_0}M^+ \oplus U_{t-2t_0}M^+ \oplus \cdots$$

一方 $\quad U_t H_{-\xi_0} = U_t(H_{-\xi_0} \ominus H_{-\xi_0 e^{-\lambda t_0}}) \oplus U_{t+t_0}(H_{-\xi_0} \ominus H_{-\xi_0 e^{-\lambda t_0}})$
$\oplus \cdots$

$$= U_t M^- \oplus U_{t+t_0}M^- \oplus \cdots .$$

しかるに、$U_t H_{\xi_0} = H_{\xi_0 e^{-\lambda t}} = E^{\nabla}_{\xi_0 e^{-\lambda t}} H$, 且

$$U_t H_{-\xi_0} = H_{-\xi_0 e^{-\lambda t}} = E^{V}_{-\xi_0 e^{-\lambda t}} H$$。 Iを単位作用素とすると

$$E^{V}_{\xi_0 e^{-\lambda t}} \to I \quad (t \to +\infty) \quad (\text{strongly})$$

$$E^{V}_{-\xi_0 e^{-\lambda t}} \to E_0 \quad (t \to -\infty) \quad (\text{strongly})$$

以上から

$$H = \sum \oplus (H_n^+ \oplus H_n^-)$$

を得る。$\{U_t\}$が H_n^+ 及び H_n^- $(n=1,2,\dots)$ 上で単純ルベーグスペクトルを持つことは前章　と類似な方法で示される。$t>t_0$とする。

$$U_t \varphi_1 \in U_t H_{\xi_0 e^{-\lambda t_0}} \ominus U_t H_{\xi_0} \subset H_{\xi_0 e^{-\lambda(t+t_0)}} \ominus$$

$$\ominus H_{\xi_0 e^{-\lambda t_0}}$$

であるから $|t| \geq t_0$ ならば、$(U_t\varphi_1, \varphi_1) = 0$ を得る。従って Paley-Wiener の定理から、$\{U_t\}$は H_1^+ 上で Lebesgue 単純スペクトルを持つことがわかる。以下前章定理2.2と同様に、リース・ウィナーの直交化の各ステップ毎に$\{U_t\}$が単純ルベーグスペクトル　を持つことがわかる。以上を総合して、次の定理を得る。

定理3.2. 可分ヒルベルト空間上のユニタリー作用素の 1-parameter group $\{U_t\}$が拡大又は縮少している transversal group $\{V_s\}$ を持てば、$\{U_t\}$はルベーグスペクトルを持つ。

§4. Automorphism の Metrical type と Transversal Flow

確率空間(Ω, μ)上の特殊な automorphism の metrical type がその transversal flow の metrical type によって決定されることがある。この章ではこのような automorphisms の class について述べる。

(Ω, μ)を可分な確率空間とし、A を Ω 上の automorphism とする。

定義4.1. Automorphism A が type (D) であるとは、純点スペクトルを持つ Ergodic flow $\{Z_s\}$ が存在して、或るλ $(|\lambda| \neq 1)$に対して

$$AZ_s = Z_{\lambda s}A \quad , \quad -\infty < s < +\infty$$

をみたす時を云う。

この type の class は von Neuman の結果によって compact abelian group 上の automorphism によって実現されることがわかる。

定理4.1 (Ω, μ)上の automorphism A が type (D) ならば、コンパクト・アーベル群 G 及び その上の automorphism $\tilde{A}$ が存在して、A は $\tilde{A}$ と metrically equivalent である。この時、$\tilde{A}$ は G の 1-パラメーター群$\{g_t\}$によって定義される flow $\{\tilde{Z}_s\}$に

$$\tilde{Z}_s g = g + g_s \quad , \quad g \in G$$

を transversal flow にもつ。

証明 A の Transversal flow $\{Z_s\}$ のスペクトル全体を $\Gamma = \{\mu_j\}$ とする。$\{Z_s\}$ がエルゴード的だから von Neuman の定理 により、Γ は実数加群 R の離散部分群である。$\mathcal{L}^2(\Omega)$ の base を $\{\psi_j\}$ とする。この時 $\psi_j(Z_s x) = e^{is\mu_j}\psi_j(x)$、$j = 1, 2, \ldots$ として良い。$G \equiv \hat{\Gamma}$ (Γ の character group) とすれば G は compact abelian group である。又 $\gamma_j(g) = (g, \mu_j)$; $g \in G$ とかくことにすれば $\{\gamma_j\}$ は $\mathcal{L}^2(G)$ の base となる。$U\psi_j \equiv \gamma_j$、$\psi_j \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ とし、U を $\mathcal{L}^2(\Omega)$ 全体に extension したものを改めて U とかくことにすれば、U は $\mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(G)$ のユニタリー作用素且 multiplicative、即ち $U(fg) = Uf \cdot Ug$ である。従って U は $G \to \Omega$ の或る isomorphism S によって induce される。即ち $U\psi_j(g) = \psi_j(Sg) = \gamma_j(g)$, $g \in G$.
$\tilde{Z}_s \equiv S^{-1} Z_s S$ 且 $\tilde{A} \equiv S^{-1} A S$ とおく。$\tilde{A}$, $\{\tilde{Z}_s\}$ が求めるものであることを示す。

$$\begin{aligned}
\tilde{A}\tilde{Z}_s &= (S^{-1}AS)(S^{-1}Z_sS) = S^{-1}AZ_sS = S^{-1}Z_{\lambda s}AS \\
&= (S^{-1}Z_{\lambda s}S)(S^{-1}AS) = \tilde{Z}_{\lambda s}\tilde{A}.
\end{aligned}$$

即ち $\{\tilde{Z}_s\}$ は拡大係数 λ を持つ $\tilde{A}$ の transversal group である。
1パラメーター群 $\{g_s\}$ を $(g_s, \gamma_j) \equiv e^{is\mu_j}$ で定義してやる

と、 $S^{-1}x = g$ とした時、

$$\psi_j(Z_s x) = e^{is\mu_j}\psi_j(x) = (g_s, \gamma_j)(S^{-1}x, \gamma_j)$$
$$= (g_s + S^{-1}x, \gamma_j) = (g_s + g, \gamma_j)$$

一方 $\psi_j(SS^{-1}Z_s x) = (S^{-1}Z_s x, \gamma_j) = (S^{-1}Z_s SS^{-1}x, \gamma_j)$
$$= (\tilde{Z}_s S^{-1}x, \gamma_j) = (\tilde{Z}_s g, \gamma_j)$$

従って $\tilde{Z}_s g = g + g_s$. （証明終）

定理4.2 A_j を Ω_j 上の type (D) の automorphism とする ($j=1,2$)。又 $\{Z_s^j\}$ を A_j の transversal flow とする。この時、$\{Z_s^1\}$ と $\{Z_s^2\}$ が metrically equivalent なら A_1 と A_2 は metrically equivalent である。

証明 定理4.1 により、コンパクト可換群 G、G 上の automorphism $\tilde{A}_j$ 及び $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ に共通な transversal flow $\{\tilde{Z}_s\}$ が存在して、$\tilde{A}_j$ は A_j と、$\{Z_s^j\}$ は $\{\tilde{Z}_s\}$ と ($j=1,2$)、metrically equivalent である。$\tilde{A}_j^*$ を A_j の dual，即ち $(\tilde{A}_j g_s, \gamma_k) = (g_s, \tilde{A}_j^* \gamma_k)$ ($k=1,2,\cdots$) で定義されるものとする。 $\{\tilde{Z}_s\}$ が ergodic，したがって $\{g_s\}$ は G で dense であるから，$\tilde{A}_j^*\gamma_k$ を G 全体に拡張すると $\tilde{A}_j^*\gamma_k \in \hat{G}$。一方 $(\tilde{A}_j g_s, \gamma_k) = (g_{\lambda s}, \gamma_k) = e^{is\mu_k}$ より任意の $g \in G$，$\gamma_k \in \hat{G}$ に対し $(\tilde{A}_1 g, \gamma_k) = (\tilde{A}_2 g, \gamma_k)$ を得る。よって

$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$ となる。このことから A_1 と A_2 が metrically equivalent なることは容易にみられる。（証明終）

一般の automorphism について充分な結果は得られないが、次の事が云える。

Proposition 4.1. A_j を Ω_j の automorphism, $\{Z_s^j\}$ を A_j の拡大している transversal flow とした時 ($j=1,2$)、$\{Z_s^1\}$ が $\{Z_s^2\}$ と metrically equivalent 即ち Ω_2 から Ω_1 への isomorphism S が存在して、$S^{-1}Z_s^1 S = Z_s^2$ が任意の s について成立するならば、

$$A_2 = T\tilde{A}_1$$

とかける。但し $\tilde{A}_1$ は A_1 と同値な Ω_2 上の automorphism で、T は $\{Z_s^2\}$ と可換な Ω_2 上の automorphism である。

証明．明らかに $\tilde{A}_1 \equiv S^{-1}A_1S$ は A_1 と同値な Ω_2 上の automorphism である。T を

$$T\tilde{A}_1 x = A_2 x \quad , \quad x \in \Omega_2$$

で定義すれば明らかに T は Ω_2 上の automorphism である。

$$(Z_s^2 T)\tilde{A}_1 x = Z_s^2 A_2 x = A_2 Z^2_{s/\lambda} x = T\tilde{A}_1 Z^2_{s/\lambda} x = (TZ_s^2)\tilde{A}_1 x$$

$x \in \Omega_2$, より T は $\{Z_s^2\}$ と可換である。（証明終）